

Отримано: 24 липня 2016 р.

Прорецензовано: 03 серпня 2016 р.

Прийнято до друку: 15 серпня 2016 р.

Хохлов В. Ю. Value-At-Risk портфелю цінних паперів / В. Ю. Хохлов // Наукові записки Національного університету «Острозька академія». Серія «Економіка»: науковий журнал. – Острог: Вид-во НУ«ОА», вересень 2016. – № 2(30). – С. 134–139.

УДК: 336.767

JEL-класифікація: G11, G31

Хохлов Валентин Юрійович,

кандидат технічних наук, менеджер із міжнародного маркетингу Компанія Global Spirits (Київ, Україна)

VALUE-AT-RISK ПОРТФЕЛЮ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

У статті досліджено формули для Value-at-Risk портфелю цінних паперів із застосуванням ваги активів у ньому. Зважаючи на недоліки класичного підходу, де Value-at-Risk розглядається подібно стандартному відхиленню доходності, розроблено більш досконалі формули. Проведений бектестинг Value-at-Risk для індексного портфелю Dow Jones показав, що похибка оцінки ризику є меншою за розробленими формулами порівняно із класичною. Крім того, аналіз отриманих результатів показав, що ця похибка у багатьох випадках частково компенсує похибку оцінки математичного сподівання та стандартного відхилення через вибіркові статистики.

Ключові слова: оцінка ризику, Value-at-Risk, портфель, бектестинг.

Хохлов Валентин Юрьевич,

кандидат технических наук, менеджер по международному маркетингу Компанія Global Spirits (Киев, Украина)

VALUE-AT-RISK ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

В статье исследованы формулы Value-at-Risk портфеля ценных бумаг с использованием весов активов в нем. Учитывая недостатки классического подхода, при котором Value-at-Risk рассматривается подобно стандартному отклонению доходности, разработаны более совершенные формулы. Проведенный бектестинг Value-at-Risk для индексного портфеля Dow Jones показал, что ошибка оценки риска по разработанным формулам является меньшей, нежели по классической. Кроме того, анализ полученных результатов выявил, что эта ошибка во многих случаях частично компенсирует ошибку оценки математического ожидания и стандартного отклонения по выборочным статистикам.

Ключевые слова: оценка риска, Value-at-Risk, портфель, бектестинг.

Valentyn Khokhlov,

Ph.D., international marketing manager Global Spirits (Kiev, Ukraine)

PORTFOLIO VALUE-AT-RISK

In this paper the portfolio Value-at-Risk formulas are investigated using the portfolio assets weights. Considering drawbacks of the classic approach, where Value-at-Risk is treated like the standard deviation of return, more sophisticated formulas are derived. The Value-at-Risk back-testing of the Dow Jones index portfolio shows that the estimation error for the derived formulas is lower than for the classic approach. Moreover, analysis of the results shows that in many cases this error partially offsets the estimation error for the expected returns and their standard deviations through sample statistics.

Keywords: risk assessment, Value-at-Risk, portfolio, back-testing.

Постановка проблеми. Value-at-Risk (VaR) є одним із основних вимірювачів фінансового ризику, його використання, зокрема, регламентується в документах Basel II та III, також він широко застосовується під час управління активами. Управління портфелем цінних паперів полягає у визначенні ваги активів у ньому для досягнення визначених цілей, зокрема, за показником VaR. Таким чином, виникає проблема визначення VaR портфелю через вагові коефіцієнти активів у портфелі, вирішення цієї проблеми дозволяє проводити оптимізацію структури портфелю та визначення джерел ризиків у ньому.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Визначенню та оцінюванню VaR для окремого активу присвячені чисельні праці таких дослідників, як Джоріон [1–2], Стембо [3], Даффі [4], Лінсмейер [5]. Усі ці розробки можна використовувати до портфелів цінних паперів, якщо розглядати їх як окремий актив. Але на практиці для управління портфелем необхідно розглядати його як набір активів із визначеними ваговими коефіцієнтами, таким чином VaR портфелю потрібно розписати через вагу активів у ньому. «Наївний» підхід до вирішення цієї проблеми запропоновано ще у [2], але він ігнорує доходність активів, тому, незважаючи на його розповсюдженість на практиці, цей підхід не може вважатися задовільним. Більш складні механізми оцінки VaR портфелю з'явилися лише останнім часом, зокрема Бенаті [6] наводить модель цілочисельного програмування, а Лу [7] пропонує використовувати копули у

GARCH-моделі. Але ці моделі є математично набагато більш складними, тому питання їх застосування на практиці є відкритим.

Мета і завдання дослідження. Метою цього дослідження є удосконалення класичної моделі оцінки VaR портфелю через використання ваги активів у ньому. Завданнями дослідження є розробка формул VaR портфелю, які містять дохідність активів та перевірка якості оцінки розроблених формул у порівнянні з класичною формулою. Методом дослідження є бектестинг VaR.

Виклад основного матеріалу. VaR будь-якого фінансового активу визначається як найбільший розмір збитків, який на визначеному проміжку часу можна зазнати з імовірністю, що не перевищує задану [2, с. 246]. Починаючи з фундаментальних праць Джоріона, розповсюдженою практикою є використання стандартного відхилення для оцінки VaR, наприклад, у [2, с. 67] наведено таку формулу VaR портфелю цінних паперів через вагу активів у портфелі:

$$VaR = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}} = \sigma_p \Phi^{-1}(\alpha), \quad (1)$$

де α – ймовірність, із якою розраховується VaR;

Φ – кумулятивна функція стандартного розподілу випадкової величини;

$\mathbf{w} = [w_i]_{i=1, \dots, n}$ – вектор вагових коефіцієнтів активів у портфелі;

$\Sigma = [\sigma_{ij}]_{i, j=1, \dots, n}$ – коваріаційна матриця,

$\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}}$ – стандартне відхилення дохідності портфеля.

Зауважимо, що на практиці інвестиційні професіонали працюють зі звичайною дохідністю, але в академічних працях із управління ризиками, зокрема [1–5], використовується логарифмічна дохідність, тобто робиться припущення щодо розподілу не самої випадкової дохідності r , а випадкової величини $\tilde{r} = \ln(1+r)$. Нехай випадкова величина r має математичне сподівання μ та стандартне відхилення σ , а випадкова величина \tilde{r} – відповідно $\tilde{\mu}$ та $\tilde{\sigma}$. У нашій попередній статті [8] показано, що VaR-множник у випадку логарифмічної дохідності розраховується так:

$$v = 1 - \exp(\tilde{\mu} + \tilde{\sigma} \Phi^{-1}(\alpha)) = 1 - \exp(\tilde{\mu}) \exp(\tilde{\sigma} \Phi^{-1}(\alpha)), \quad (2)$$

де v – VaR портфелю одиничної вартості, тобто;

$\tilde{\mu}$ – математичне сподівання логарифмічної дохідності;

$\tilde{\sigma}$ – стандартне відхилення логарифмічної дохідності;

Φ – кумулятивна функція стандартного розподілу випадкової величини.

Складність адаптації формули до оцінки VaR портфелю цінних паперів полягає в тому, що математичне сподівання та стандартне відхилення дохідності портфелю розписується через вагу його активів лише для звичайної дохідності, тобто

$$\mu_p = \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} \quad \text{та} \quad \sigma_p^2 = \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}; \quad (3)$$

де $\mathbf{w} = [w_i]_{i=1, \dots, n}$ – вектор вагових коефіцієнтів активів у портфелі;

$\boldsymbol{\mu} = [\mu_i]_{i=1, \dots, n}$ – вектор математичних сподівань дохідностей активів;

$\Sigma = [\sigma_{ij}]_{i, j=1, \dots, n}$ – коваріаційна матриця.

Але для логарифмічної дохідності такі формули написати неможливо, наприклад, $\tilde{\mu}_p = \ln(1 + \mu_p) = \ln(1 + \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu}) \neq \mathbf{w}' \tilde{\boldsymbol{\mu}}$. Наразі не існує математично коректних шляхів представити стандартне відхилення логарифмічної дохідності портфеля через вагові коефіцієнти. Тим не менше, для оптимізації портфелю за VaR потрібно робити припущення щодо того, як його VaR можна розписати через вагу компонентів.

Першим шляхом розв'язання цього протиріччя є використання формули для логарифмічних дохідностей у той самий спосіб, що й для звичайних, тобто $\tilde{\mu}_p = \mathbf{w}' \tilde{\boldsymbol{\mu}}$ та $\tilde{\sigma}_p^2 = \mathbf{w}' \tilde{\Sigma} \mathbf{w}$. Оскільки це припущення не є математично коректним, то на практиці виникає похибка оцінювання значень $\tilde{\mu}_p$ та $\tilde{\sigma}_p$, та, відповідно, похибка оцінювання VaR портфелю. Якщо цей підхід застосувати до формули Джоріона, то значення VaR-множника портфелю розраховується як:

$$v = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\sum_{i, j=1}^n w_i w_j \tilde{\sigma}_{ij}}, \quad (4)$$

тоді як під час застосування до формули значення VaR-множника дорівнює

$$v = 1 - \exp\left(\sum_{i=1}^n w_i \tilde{\mu}_i + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\sum_{i, j=1}^n w_i w_j \tilde{\sigma}_{ij}}\right). \quad (5)$$

Другим шляхом, який частково зменшує некоректність, є використання математично коректного виразу для логарифмічної дохідності портфеля, $\exp(\tilde{\mu}_p) = \exp(\ln(1 + \mu_p)) = 1 + \mu_p = 1 + \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu}$, хоча для стан-

дартного відхилення все ще застосовується математично некоректне наближення. Тоді значення VaR-множника портфелю можна записати так:

$$v = 1 - \left(1 + \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \right) \exp \left(\Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\sum_{i,j=1}^n w_i w_j \tilde{\sigma}_{ij}} \right). \quad (6)$$

Під час практичного застосування формул виникають два джерела похибок:

1) похибка оцінювання невідомих параметрів випадкових величин r_i чи \tilde{r}_i через вибіркові статистики, наприклад, використання вибірових середніх для оцінювання математичних сподівань μ_i чи $\tilde{\mu}_i$;

2) похибка внаслідок математично некоректного використання формули для логарифмічної дохідності, а для формули ще й внаслідок ігнорування математичного сподівання дохідності.

Перевірити те, як ці два джерела похибок впливають на якість оцінювання VaR портфелю можна за допомогою процедури бектестинга. При цьому ми розбиваємо деякий проміжок часу на інтервали, на кожному інтервалі оцінюємо VaR за формулами, і рахуємо кількість «пробоїв», тобто випадків, коли фактичний збиток портфелю на цьому інтервалі був більший за розраховане значення VaR. Чим ближчою є фактична частота пробів до теоретичної ймовірності VaR, тим вища якість оцінки.

Бектестинг VaR ми провели на базі індексу Dow Jones у 2004-2015 роках, при чому порівнювали щоденний VaR та двотижневий VaR (два календарні тижні відповідають 10 торговельним дням). Оцінка VaR здійснювалась на перше число кожного місяця з серпня 2004 по грудень 2015 років. Оцінку параметрів $\mu_i, \tilde{\sigma}_{ij}, \mu_i, \tilde{\sigma}_{ij}$ ми робили із вибірки дохідностей (відповідно, звичайних та логарифмічних) за два роки, що передували цьому місяцю. У якості активу, що моделює індекс, був використаний біржовий фонд DIA, а відомі вагові коефіцієнти 42 акцій, які знаходилися в портфелі цього фонду у 2004-2015 роках використовувались у якості значень w_i .

Для виявлення впливу другого джерела похибки, тобто математичної некоректності у формулах, – ми окремо провели бектестинг VaR портфелю, а окремо – бектестинг VaR фонду DIA, розрахованого безпосередньо за формулою. Оскільки в останньому випадку ми оцінювали VaR із вибірки дохідностей портфелю загалом, а не окремих його компонентів, то ми мали лише перше джерело похибки – похибку оцінювання параметрів випадкової величини. Порівняння результатів бектестингу VaR фонду DIA та VaR портфелю дозволило відокремити друге джерело похибки від першого та оцінити ефект, який привнесений математичної некоректністю застосованих формул.

У таблицях 1 та 2 наведені розраховані значення VaR у серпні 2004 року. З таблиць видно, що формули дають набагато консервативнішу оцінку VaR портфелю, ніж формула, тобто на перший погляд вплив некоректного використання формули для випадку логарифмічної дохідності призвів до переоцінки ризику. Формули насправді дають дуже подібні значення, хоча для коректнішої формули похибка в оцінці ризику є меншою. Якщо порівняти обидві формули, то саме остання дає суттєво більшу похибку і має найбільшу некоректність (ігнорує сподівану дохідність), тому попередній висновок – чим більшу математичну некоректність ми вводимо у формули, – тим більшою є переоцінка ризику. Але цей висновок зроблений лише на одному місяці, далі розглянемо інші часові періоди.

Таблиця 1

Значення щоденного VaR портфеля Dow Jones у серпні 2004 року

| VaR | Розподіл | Фонд DIA | Портфель за (4) | Портфель за (5) | Портфель за (6) |
|------|--------------|----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | нормальний | 1.8609% | 2.1521% | 2.0934% | 2.0747% |
| 5% | Стюдента (3) | 1.5330% | 1.7778% | 1.7262% | 1.7074% |
| | Лапласа | 1.8418% | 2.1303% | 2.0720% | 2.0533% |
| | нормальний | 2.6374% | 3.0438% | 2.9625% | 2.9440% |
| 1% | Стюдента (3) | 2.9719% | 3.4301% | 3.3366% | 3.3182% |
| | Лапласа | 3.1354% | 3.6193% | 3.5194% | 3.5010% |
| | нормальний | 3.5005% | 4.0433% | 3.9276% | 3.9092% |
| 0,1% | Стюдента (3) | 6.6070% | 7.7162% | 7.3922% | 7.3745% |
| | Лапласа | 4.9564% | 5.7497% | 5.5530% | 5.5350% |

Таблиця 2

Значення двотижневого VaR портфеля Dow Jones у серпні 2004 року

| VaR | Розподіл | Фонд DIA | Портфель за (4) | Портфель за (5) | Портфель за (6) |
|-----|--------------|----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | нормальний | 4.8965% | 6.1086% | 5.4483% | 5.2883% |
| 5% | Стюдента (3) | 3.9782% | 5.0460% | 4.4381% | 4.2765% |
| | Лапласа | 4.8432% | 6.0467% | 5.3897% | 5.2296% |

Закінчення Таблиці 2

| | | | | | |
|------|--------------|----------|----------|----------|----------|
| | нормальний | 7.0483% | 8.6396% | 7.8113% | 7.6553% |
| 1% | Стюдента (3) | 7.9653% | 9.7360% | 8.8165% | 8.6622% |
| | Лапласа | 8.4113% | 10.2731% | 9.3050% | 9.1516% |
| | нормальний | 9.4024% | 11.4765% | 10.3898% | 10.2382% |
| 0,1% | Стюдента (3) | 17.5528% | 21.9015% | 19.2613% | 19.1247% |
| | Лапласа | 13.2847% | 16.3198% | 14.6265% | 14.4821% |

У 2008–2009 роках світ переживав одну з найбільших фінансових криз. Саме ця криза призвела до суттєвого переосмислення ризик-менеджменту, зокрема, неадекватності нормального розподілу для оцінки ризику у хвостах розподілу, як вказано [9]. Результати бектестингу VaR 5% протягом фінансової кризи наведені на рисунку 1.

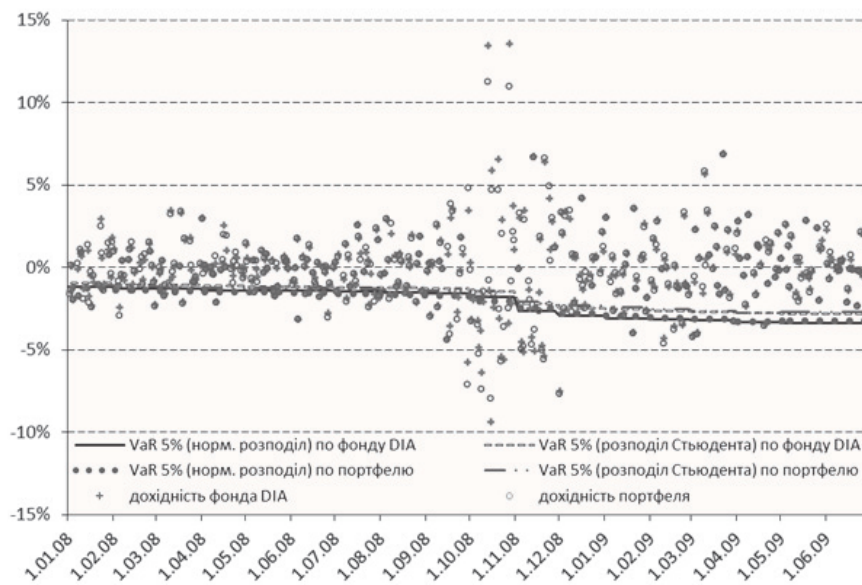


Рис. 1. Бектестинг щоденної VaR 5% фонду DIA з січня 2008 по червень 2009 р.

Як можна побачити, саме в цей період, восени 2008 та на початку 2009 років ми маємо найбільшу кількість пробоїв VaR, що суттєво перевищує теоретичну ймовірність цих подій. При цьому вплив вибору розподілу (нормальний чи Стюдента з 3 ступенями свободи) є набагато більш суттєвим, ніж варіант формули – чи. На рисунку лінії, що відповідають різним формулам VaR для одного розподілу майже накладаються одна на одну, тоді як для різних розподілів ми бачимо відстань між ними.

Звичайно, оцінка VaR здійснюється на вибірках попередніх дохідностей, тому вплив більшої волатильності протягом фінансової кризи має відчуватись із деяким лагом. Розглянемо результати бектестингу VaR протягом наступного періоду, з липня 2009 по грудень 2010 року (див. рисунок 2). Ми бачимо набагато меншу волатильність дохідностей, але оцінки VaR зберігаються на досить високому рівні до листопада 2010 року, і лише після цього ефект фінансової кризи зменшується. Це обумовлене тим, що оцінку VaR в нашому дослідженні ми робили на вибірці дохідностей за попередні два роки. Але ми знову бачимо, що вплив вибору розподілу є більш суттєвим, ніж вплив варіанту формули.

Результати бектестингу VaR протягом усього досліджуваного періоду, а саме частоти пробоїв VaR, наведені в таблицях 3 та 4. Нагадаємо, що якість оцінки VaR є тим вищою, чим ближче ця частота до теоретичної ймовірності (5%, 1% чи 0,1%). Ми бачимо, що різниця оцінки VaR безпосередньо за дохідністю фонду DIA та за формулами VaR портфелю є досить великою. Якщо для VaR 5% формули VaR портфелю значно переоцінюють ризик, то для VaR 1% та 0,1% їхній результат є навіть кращим, ніж у безпосередньої оцінки. Тим не менше, виходячи з наведених результатів, нам складно визнати задовільною оцінку VaR портфелю за формулами – для нормального розподілу чи розподілу Лапласа. Лише розподіл Стюдента з 3 ступенями свободи в цьому випадку може бути рекомендованим для оцінки VaR портфелю.

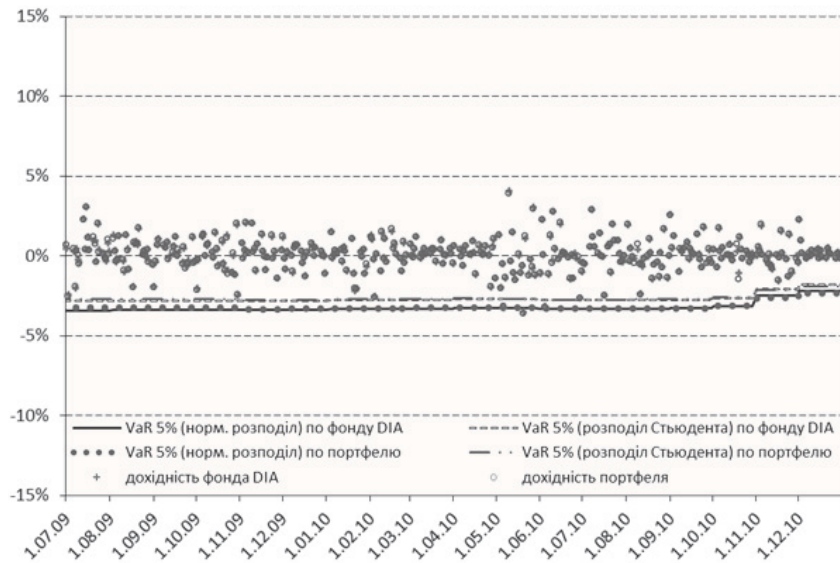


Рис. 2. Бектестинг щоденної VaR 5% фонду DIA з липня 2009 по грудень 2010 р.

Таблиця 3.

Частота пробітів щоденного VaR за різними варіантами його оцінки

| VaR | Розподіл | Фонд DIA | Портфель за (4) | Портфель за (5) | Портфель за (6) |
|------|--------------|----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 5% | нормальний | 4.23% | 2.95% | 3.19% | 3.19% |
| | Стюдента (3) | 5.94% | 4.50% | 4.90% | 4.97% |
| | Лапласа | 4.26% | 2.95% | 3.22% | 3.29% |
| 1% | нормальний | 1.71% | 1.38% | 1.38% | 1.38% |
| | Стюдента (3) | 1.38% | 1.04% | 1.07% | 1.07% |
| | Лапласа | 1.31% | 0.84% | 0.91% | 0.91% |
| 0,1% | нормальний | 0.91% | 0.64% | 0.67% | 0.70% |
| | Стюдента (3) | 0.07% | 0.03% | 0.07% | 0.07% |
| | Лапласа | 0.34% | 0.13% | 0.17% | 0.17% |

Таблиця 4.

Частота пробітів двотижневого VaR за різними варіантами його оцінки

| VaR | Розподіл | Фонд DIA | Портфель за (4) | Портфель за (5) | Портфель за (6) |
|------|--------------|----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 5% | нормальний | 4.18% | 2.56% | 3.47% | 3.67% |
| | Стюдента (3) | 6.20% | 4.04% | 4.88% | 5.42% |
| | Лапласа | 4.31% | 2.69% | 3.54% | 3.67% |
| 1% | нормальний | 1.82% | 1.25% | 1.52% | 1.58% |
| | Стюдента (3) | 1.52% | 1.01% | 1.21% | 1.25% |
| | Лапласа | 1.31% | 0.77% | 1.04% | 1.11% |
| 0,1% | нормальний | 1.04% | 0.57% | 0.77% | 0.77% |
| | Стюдента (3) | 0.10% | 0.10% | 0.10% | 0.10% |
| | Лапласа | 0.34% | 0.10% | 0.24% | 0.24% |

Із таблиць 3 та 4 можна зробити висновок, що похибка внаслідок некоректного використання статистик логарифмічної дохідності у формулах – завжди призводить до переоцінки ризику, тому що частота пробітів VaR портфелю є меншою порівняно з оцінкою за безпосередньою дохідністю фонду. Похибка є найменшою для формули, дещо більшою для формули і набагато більшою для формули. З другого боку, похибка оцінки невідомих параметрів через вибіркові статистики часто призводить до недооцінки ризику, особливо для VaR 1% та 0,1%, і це компенсує вищевказану переоцінку ризику. Найкраще це про-

являється під час використання розподілу Стьюдента, коли взаємна компенсація похибок призводить до того, що формули VaR портфелю – для статистики його компонентів дають кращу оцінку ризику, ніж використання безпосередньо статистик портфеля.

Висновки. Наше дослідження показало, що оцінка VaR портфелю із використанням вагових коефіцієнтів активів у ньому є нетривіальною проблемою через відсутність аналогів формул для логарифмічної дохідності, яка застосовується під час оцінки VaR. Ми можемо лише навести наближені формули VaR портфелю, що привносять нове джерело похибки через використання формул звичайної дохідності для логарифмічної дохідності. Бектестинг VaR на прикладі індексу Dow Jones у 2004–2015 роках показав, що ця похибка веде до деякої переоцінки ризику в усіх випадках.

Розроблені нами формули, удосконалюють класичну формулу Джоріона, тому що ми не ігноруємо дохідність активів. Більше того, саме у формулі логарифмічна дохідність портфеля математично коректно розписана через дохідності окремих активів. Бектестинг VaR показав, що завдяки цьому формула має найменшу похибку порівняно з формулами та. При цьому формула, що базується на класичній формулі Джоріона, дає набагато більшу похибку, аніж розроблені нами. Тому ми спромогли покращити якість оцінювання VaR портфелю без переходу до інших, більш складних математичних конструкцій.

Проведений бектестинг VaR на прикладі індексу Dow Jones у 2004–2015 роках також показав, що похибка оцінки VaR портфелю за формулами – компенсує похибку оцінювання невідомих параметрів випадкової величини – дохідності портфелю – через вибіркові статистики. Оскільки похибка оцінки VaR портфелю завжди переоцінює ризик, то ефект компенсації відбувається тільки тоді, коли похибку оцінювання параметрів веде до недооцінки ризику. На практиці, ми спостерігали найкращу компенсацію одного джерела похибки інших під час використання розподілу Стьюдента з 3 ступенями свободи та формули оцінки VaR портфелю.

Література:

1. Jorion P. Risk2 : Measuring the risk in value at risk / Philippe Jorion // *Financial Analysts Journal*. – 1996. – Volume 52, Issue 6. – P. 47–56.
2. Jorion P. *Financial Risk Manager Handbook*. – Wiley, 2003. – 832 p.
3. Stambaugh F. Risk and Value at Risk / Fred Stambaugh // *European Management Journal*. – 1996. – Volume 14, Issue 6. – P. 612–621.
4. Duffie D. An Overview of Value at Risk / Darrell Duffie, Jun Pan // *Journal of Derivatives*. – 1997. – No. 4. – P. 7–49.
5. Linsmeier T. J. Value at Risk / Thomas J. Linsmeier, Neil D. Pearson // *Financial Analysts Journal*. – 2000. – Vol. 56, No. 2. – P. 47–67.
6. Benati S. A mixed integer linear programming formulation of the optimal mean / Value-at-Risk portfolio problem / Stefano Benati, Romeo Rizzi // *European Journal of Operational Research*. – 2007. – Vol. 176. – P. 423–434.
7. Lu X. F. Portfolio value-at-risk estimation in energy futures markets with time-varying copula-GARCH model / Lu, Xun Fa ; Lai, Kin Keung; Liang, Liang // *Annals of Operations Research*. – 2014. – Vol. 219, Issue 1. – P. 333–357.
8. Хохлов В. Ю. Оцінка ризику для розподілів з «великими хвостами» / В. Ю. Хохлов // *Наукові записки Національного університету «Острозька академія»*. Серія «Економіка»: збірник наукових праць. – Острог: Видавництво Національного університету «Острозька академія», 2014. – Випуск 27. – С. 150–153.
9. Талеб Н. Н. Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости. – М.: КоЛибри, 2009. – 528 с.